SYM-OP-IS 2008
XXXV Simpozijum o operacionim istraživanjima
Saobraćajni fakultet Univerziteta u Beogradu

ОПТИМИЗАЦИЈА МЕТОДЕ КОНТУРА ПРИЛАГОЂЕНЕ ЗА ПРОРАЧУН ГАСНИХ ДИСТРИБУТИВНИХ МРЕЖА

OPTIMIZATION OF LOOP METHOD ADJUSTED FOR CALCULATION OF GAS DISTRIBUTION NETWORK

ДЕЈАН БРКИЋ
Стипендиста Министарства Науке, Београд, dejanrgf@tesla.rcub.bg.ac.rs

ТОМА ТАНАСКОВИЋ
Рударско-геолошки факултет, Београд, tanaskovic@rgf.bg.ac.yu

Резиме: *Гасна дистрибутивна мрежа у насељима је обично прстенастог типа, како би гас до потрошача могао да стигне из више праваца. Овиме је осигурано да најмањи могући број потрошача остане без гаса у случају квара на некој деоници гасовода. Међутим, прорачун оваквог типа мреже је далеко сложенији у односу на прорачун разгранате дистрибутивне мреже. Овде је дат пример како се може унапредити брзина итеративног поступка при прорачуну мреже методом Харди Кроса.*

Ključne reči: *Природни гас, Дистрибутивна мрежа, Харди Крос.*

Abstract: *Gas distributive network in settlements are usually with contours, which assure that gas is available for consumers from few different directions. By application of concept of looped network least possible number of consumers can remain without gas in the case of malfunction in some branch. But, calculation of these types of networks is much more complicated compared with branch type of network. Here is shown example of one possible way of improvement of iterative procedure during the calculation of network according to Hardy Cross method.*

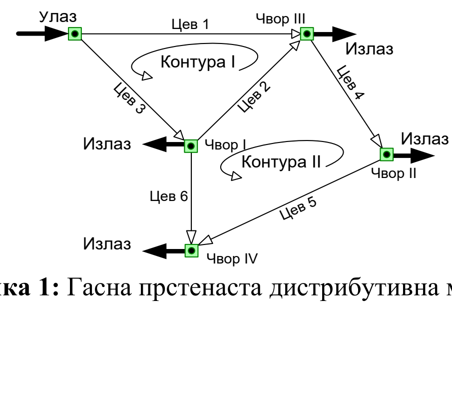
Keywords: *Natural Gas, Distribution Network, Hardy Cross.*

1. УВОД

Харди Крос метод се врло често у користи за прорачун, односно оптимизацију прстенастих гасних дистрибутивних мрежа, било да је примењен у оригиналном облику [1] или у коригованом облику какав је првенствено развијен за потребе пројектовања водоводних система [2] (тзв. нумеричко решење Њутновом методом[1] за систем нелинеарних алгебарских једначина), и који је овде прилагођен за оптимизацију [3] прстенасте гасне дистрибутивне мреже. Харди Крос (Hardy Cross; 1885-1959, амерички инжењер), је развио још 1936. године метод за прорачун стационарног протока некомпресибилног флуида [1] (односно избора оптималне структуре пречника цеви у мрежи). Узимајући да је пад притисака у дистрибутивној мрежи доста мали, може се без великих грешака сматрати да се природни гас у овом типу мрежа понаша као течност. Када се метод користи за прорачун водоводних мрежа прстенастог типа, уместо Реноарове (енг. Renouard) (5) једначине [4], која се уобичајено користи за опис протока гаса при датим условима који владају у цевоводу, користе се друге прикладније једначине као што су Дарси-Вајсбах (енг. Darcy-Weisbach), односно Хазен-Вилијамс (енг. Hazen-Williams). Овај метод се не може користити у случају нестационарног протока некомпресибилног флуида, односно у случају када у мрежи владају велики падови притисака, тј. када су силе инерције које владају у флуиду велике.

2. МАТЕМАТИЧКИ ОПИС МРЕЖЕ

Харди-Крос методом прорачуна унапред се одабира максимална потрошња по чворовима на основу потреба потрошача дуж деонице, и једно или више места за напајање дистрибутивне мреже (Слика 1). Ови параметри су константе у прорачуну. У пракси потрошачи су распоређени дуж појединих грана мреже целом дужином. Сва потрошња дуж одређене гране се своди на потрошњу у чвору.



Слика 1: Гасна прстенаста дистрибутивна мрежа

---

[1] на енглеском језику познатији као Newton-Raphson method

Прорачун мреже се даље врши тако да се као резултат прорачунају протоци кроз деонице у зависности од изабраног пречника цеви. На крају се врши провера дозвољених брзина струјања гаса по деоницама и падови притисака, односно притисци у чворовима. Ако је брзина протока већа од дозвољене, за такве деонице се бира већи пречник и цео прорачун се понавља. Ограничење брзине је 6 m/s за цеви мањег пречника (од 0,09 m до 0,225 m) и 12 m/s за цеви већег пречника (преко 0,225 m) [5]. На основу првих претпоставки протока, бирају се унутрашњи пречници по следећој формули (1):

$$Q_a = v \cdot A_c = v \cdot \frac{D_u^2 \cdot \pi}{4} \Rightarrow D_u = \sqrt{\frac{4 \cdot Q_a}{v \cdot \pi}} \qquad (1)$$

У овој формули (1) фигурише вредност протока (Q_a [m^3/s]) на условима притиска који влада у мрежи (v-брзина [m/s], A_c-површина попречног пресека цеви [m^2], D_u-унутрашњи пречник цеви [m]). Уколико у дистрибутивној мрежи влада надпритисак од $3 \cdot 10^5$ Pa, односно $p_a = 4 \cdot 10^5$ Pa апсолутних, потребно је свести вредности протока са нормалних услова према пропорцији $p_a \cdot Q_a = p_n \cdot Q_n$. За овако добијене вредности унутрашњих пречника бирају се најближе стандардне цеви du (du~Du). Изабрани пречници могу остати даље током прорачуна непромењљиви, док се повећање пречника у деоницама у којима је прекорачена дозвољена брзина врши на крају уз обавезно понављање прорачуна.

Падови притисака се по договору узимају са позитивним предзнаком уколико се смер обилажења контуре поклопи са смером протока гаса, и обрнуто. Први Кирхофов закон мора бити задовољен у сваком тренутку. Међутим, у итеративном поступку услов по другом Кирхофовом закону бива задовољен тек у каснијим итерацијама (алгебарски збир падова притисака по контурама ковергира ка 0). Прорачун је сложенији него код електричних кола зато што еквивалент електричног отпора у гасним мрежама није константна величина већ зависи од протока и притиска (разлика притисака је аналогна електричном напону, док је протоку аналогна електрична струја). За N-1 чворова може од исто толико независних једначина континуитета (2) по првом кирхофовом закону, за мрежу која има X цеви:

$$\sum_{i=1}^{X} \sum_{j=1}^{N-1} \operatorname{sgn}(Q_{ji}) \cdot Q_i = Q_{j(\text{output})} \qquad (2)$$

$$\operatorname{sgn} Q = \begin{cases} 1, & \text{Цев припада чвору, смер протока ка чвору} \\ 0, & \text{Цев не припада чвору} \\ -1, & \text{Цев припада чвору, смер протока из чвора} \end{cases}$$

Ако се мрежа напаја из више извора, тада те количине гаса које улазе у мрежу преко других чворова фигурирају у једначини (2) као Q са знаком минус [6], док се тај исти члан у матрици [Q] појављује са негативним предзнаком. Једначина (2) у матричном облику може да се напише као; [sgn(Q)]*[Q]=[Qoutput], односно; за случај мреже са слике 1, може се написати (2а):

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{II-output} \\ Q_{III-output} \\ Q_{IV-output} \\ Q_{V-output} \end{bmatrix} \qquad (2a)$$

За независне контуре може се написати скуп од X-N+1 независних једначина одржања енергије по другом кирхофовом закону (3):

$$\sum_{i=1}^{X} \sum_{j=1}^{X-N+1} \operatorname{sgn}(\Delta p)_{ji} \cdot \Delta p_i = 0 \qquad (3)$$

$$\operatorname{sgn} \Delta p = \begin{cases} +1, & \text{Цев припада контури, смер обиласка и смер протока се поклапају} \\ 0, & \text{Цев не припада контури,} \\ -1, & \text{Цев припада контури, смер обиласка и смер протока се не поклапају} \end{cases}$$

Односно; у матричном облику као [sgn(Δp)]·[Δp]=0, Такође, за мрежу са слике 1 може се написати (3а):

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \Delta p_3 \\ \Delta p_4 \\ \Delta p_5 \\ \Delta p_6 \end{bmatrix} = 0 \qquad (3a)$$

Једначина (4) служи као провера тачности поступка и мора бити задовољена у свакој итерацији ($[Z]^T$ је транспонована матрица [Z]). Уколико су једначине формиране без грешке мора бити задовољен услов (4):

$$[\operatorname{sgn}(Q)] \cdot [\operatorname{sgn}(\Delta p)]^T = 0 \qquad (4)$$

Свака формула [4] за одређивање пада притиска при протоку гаса за средње и високе притиске може се изразити у облику $p_2^2 - p_1^2 = R \cdot Q^n$, и у облику $p_2 - p_1 = R \cdot Q^n$ за ниске притиске испод 5 kPa, као нпр. Реноарова једначина (енг. Renouard) (5) за прорачун дистрибутивних мрежа средњег притиска:

$$p_2^2 - p_1^2 = 4810 \cdot \frac{\rho_r \cdot L \cdot Q_n^{1,82}}{D_u^{4,82}} \qquad (5)$$

може се написати у облику $\Delta p^2 = R \cdot Q^n$, где је: n=1,82, ρ_r-релативна густина гаса, L-дужина цеви [m], а

$$R = 4810 \cdot \rho_r \cdot L \cdot D_u^{-4,82} \qquad (5a)$$

3. МЕТОД КОНТУРА – ОПШТЕ РЕШЕЊЕ

Два типа метода су уобичајена за решавање једначина контура:

- Харди Крос метод [1], [5], [7-9]; тј. метод појединачних прорачуна поправки за сваку контуру посебно, (енг. successive substitution method; single loop adjustment method)
- Модификовани Харди Крос метод [2], [6, 7]; тј. метод једновременог израчунавања поправки за све контуре (енг. simultaneous loop solution method)

Модификовани Харди Крос метод спада у групу тзв. Њутн-Рапсон метода (енг. Newton-Raphson method).

Решење (протоци кроз цеви) зависи од улазне количине гаса у мрежу кроз улазни чвор (чворове) и потрошње по чворовима, као и одабраних пречника и дужина цеви и за такав систем је јединствено уз константне вредности притиска на улазима (тј. улазу). Уколико за потпуно исте наведене податке одаберемо различите почетне иницијалне протоке по цевима резултат ће конвергирати истом решењу после мање или више итерација.

Међутим, постоје случајеви када поједине цеви у реалности могу бити напајане двострано [10]. При прорачуну по Харди Крос методи, сва потрошња дуж деоница се придружује чворовима и кроз све цеви се предвиђа смер протока (од почетног граничног чвора до другог крајњег граничног чвора). Ово поједностављење искључује могућност да поједине деонице у појединим режимима рада мреже могу бити напајане двостано, односно да две зграде које су везане на исту деоницу повлаче гас из два различита гранична (себи ближа) чвора. Ово узрокује да се зона минималног притиска јави негде између два чвора, чиме реално стање у цеви не може просто бити описано. Ипак ова појава није занимљива за разматрање прорачуна мреже ако се не јавља при прорачунским (максималним) вредностима јер се у зависности од тренутне потрошње и распореда потрошача, може јавити бесконачно много дистрибуција протока по цевима које увек задовољавају јер су по дефиницији сви ови протоци мањи од прорачунских вредности. Међутим, ако се овај случај, двострано напајаних деоница јави при прорачунским условима (обично код симетричних мрежа), вредности протока по деоницама у итеративном поступаку могу да дивергирају. Решење је промена методе прорачуна, или што је још боље промена топологије мреже (распореда цеви), чиме се искључује опасност да неки од потрошача остану без гаса при највећем оптерећењу (они су обично на срединама деоница – удаљени од чворова).

Критеријуми за прекид итеративног поступка су [11]:

- Вредност алгебарске суме падова притисака по свим контурама мреже мора пасти испод унапред задате мале вредности,
- Разлика између израчунатих вредности протока за сваку цев у две узастопне итерације мора пасти испод унапред задате мале вредности,
- Разлика између израчунатих вредности поправки протока за сваку контуру у две узастопне итерације мора пасти испод унапред задате мале вредности, итд.

3.1 ХАРДИ КРОС МЕТОД[2]

Оптимизација мреже по оригиналној Харди Крос методологији се може спровести према једначини (6) и правилима за алгебарско сабирање поправки из главе 4 овога рада.

$$\Delta_j = -\frac{F(Q_i)_j^{(m-1)}}{\left.\dfrac{\partial F(Q_i)_j}{\partial(\Delta Q_j)}\right|_{Q^{(m-1)}}} = -\frac{\left(\sum R_i \cdot Q_i^n\right)_j^{(m-1)}}{\left(n \cdot \sum \left|R_i \cdot Q_i^{n-1}\right|\right)_j^{(m-1)}} \tag{6}$$

F(Q) је алгебарски збир једначина за пад притисака (или њихових квадрата) по цевима у контури (5) по контурама (други кирхофов закон). Поступак се понавља у итеративном поступку (са m је означена текућа итерација) док се не достигне унапред задата тачност.

3.2 МОДИФИКОВАНИ ХАРДИ КРОС МЕТОД[3]

Систем једначина F(Q) написаних за сваку контуру може се нумерички решити Њутновом методом тако да се поправке за сваку контуру добију истовремено. У матричном облику систем се може записати као (7):

$$\left[\nabla F(Q)^{(m-1)}\right] \cdot \left[\Delta Q^m\right] = \left[F(Q)^{(m-1)}\right], \tag{7}$$

где је матрица непознатих корекција за случај са слике 1 у итерацији m (7a):

$$\left[\Delta Q^{(m)}\right] = \left[\begin{Bmatrix} \Delta Q_I \\ \Delta Q_{II} \end{Bmatrix}^m\right], \tag{7a}$$

док је једначина падова притисака по контурама у итерацији (m-1) (7b):

$$\left[F(Q)^{(m-1)}\right] = \left[\begin{Bmatrix} F(Q)_I \\ F(Q)_{II} \end{Bmatrix}^{(m-1)}\right] \tag{7b}$$

Једначину (7) је најбоље решавати у матричном облику. Сходно Тејлоровој (енг. Taylor) формули, добија се Јакобијан (енг. Jacobian) матрица (8) првих извода једначина алгебарских збирова (квадрата) падова притисака по контурама (где је проток промењива по којој се диференцира) за итерацију означену као (m-1). Матрица извода је квадратна (има онолико редова и колона колико гасна мрежа има независних контура) и симетрична у односу на главну дијагоналу. Редови у матрици (8) одговарају утицајима заједничких цеви које посматрана контура има са другим контурама. Дакле, главну дијаголу чине чланови који чије су вредности исте као и у оригиналном Харди Крос методу, тј. то су збирови апсолутних вредности извода падова притисака за сваку цев у контури. Остали чланови су изводи падова притисака за сваку цев из суседних контура које су заједничке са предметном контуром (ако их нема онда су ти чланови једнаки нули). У оригиналном Харди Крос методу из 1936. године сви елементи ван главне дијагоналке су једнаки нули.

$$[gradF(Q)] = [\nabla F(Q)] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_I(Q_1,Q_2,....)}{\partial(\Delta Q_1)} & \dfrac{\partial F_I(Q_1,Q_2,...)}{\partial(\Delta Q_2)} & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_{II}(Q_1,Q_2,....)}{\partial(\Delta Q_1)} & \dfrac{\partial F_{II}(Q_1,Q_2,....)}{\partial(\Delta Q_2)} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \tag{8}$$

За пример са слике 1, претходна матрица (8) постаје (8a). Ако се све контуре описују у истом смеру, а нема цеви које се укрштају, сви чланови ван главне дијагонале у матрици градијената су са негативним предзнаком. Чланови на главној дијагонали су увек позитивни. Поступак се даље одвија итеративно као у случају оригиналног Харди Крос метода.

[2] енг. successive substitution-single loop adjustment method

[3] енг. simultaneous loop solution method

$$[gradF(Q)] = [\nabla F(Q)] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_I(Q_1,Q_2,Q_3)}{\partial(\Delta Q_1)} & \dfrac{\partial F_I(Q_2)}{\partial(\Delta Q_2)} \\ \dfrac{\partial F_{II}(Q_2)}{\partial(\Delta Q_1)} & \dfrac{\partial F_{II}(Q_2,Q_4,Q_5,Q_6)}{\partial(\Delta Q_2)} \end{bmatrix} = \tag{8a}$$

$$= \left[\begin{Bmatrix} n\cdot\left(R_1\cdot Q_1^{n-1} + R_2\cdot Q_2^{n-1} + R_2\cdot Q_2^{n-1}\right) & -n\cdot R_2\cdot Q_2^{n-1} \\ -n\cdot R_2\cdot Q_2^{n-1} & n\cdot\left(R_2\cdot Q_2^{n-1} + R_4\cdot Q_4^{n-1} + R_5\cdot Q_5^{n-1} + R_6\cdot Q_6^{n-1}\right) \end{Bmatrix}^{(m-1)} \right]$$

У j-ни (8a) се у члановима ван главне дијагонале појављује као аргумент само проток кроз цев 2 (пример мреже са слике 1) пошто је ова цев једина заједничка у две за овај случај једине контуре.

4. АЛГЕБАРСКИ ЗНАК ПОПРАВКИ ПРОТОКА

Горњи знак који се обично пише уз поправни проток корекције која потиче из суседне контуре (Δ_2) при прорачуну; + (плус) или – (минус), указује нам на начин обилажења суседне контуре у односу на претпостављени смер протока. Уколико се смер претпостављеног протока поклопи са смером обилажења суседне контуре усваја се горњи знак + (плус), у супротном – (минус). Доњи знак се преписује из прве поправке суседне контуре са којом постоји заједничка цев. Корекција Δ_1 се односи на припадајућу контуру, док се корекција Δ_2 усваја из контура којима припадају заједничке цеви.

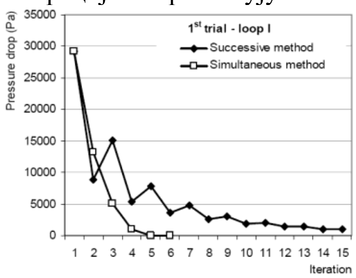
Алгебарско сабирање треба извршити на основу следећих правила [8, 9], [12]:

1. Алгебарски знак за поправку Δ_1 треба узети са различитим предзнаком од свог знака, тј. потребно је сабрати када је знак – (минус), и обрнуто;
2. Алгебарска операција за поправку Δ_2 треба да буде супротна од њеног доњег знака када је горњи знак исти као онај уз проток срачунат у претходној итерацији (односно у првој итерацији знак уз претпостављен иницијални проток), у супротном је исти као доњи знак.

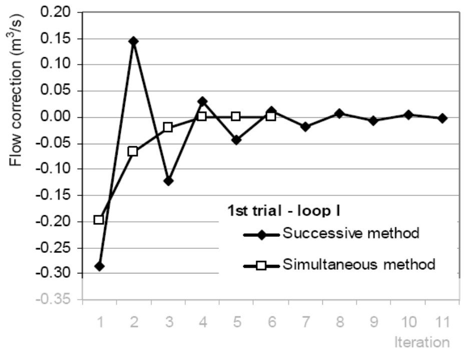
5. ЗАКЉУЧАК

Оптимизацијом оригиналног Харди Крос метода, тј. увођењем модификованог Харди Крос метода смањује се број потребних итерација за око пет пута да би се достигла иста тачност.

У наставку се као сликовити закључак дају Слика 2 која приказује пад притиска за једну контуру сложене дистрибутивне мреже и Слика 3 која приказује промену поправног протока за исту контуру, који се добијају по итерацијама примењујући оба метода.



Слика 2: Падови притисака по итерацијама за једну контуру гасне мреже



Слика 3: Поправни протоци по итерацијама за једну контуру гасне мреже

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Cross H. Analysis of flow in networks of conduits or conductors. Engineering Experimental Station 1936; 286

[2]. Epp R, Fowler A.G. Efficient code for steady flows in networks. Journal of Hydraulics Division 1970; 96: 43-56

[3]. Петрић Ј. „Операцина истраживања”; Нелинеарно програмирање, Научна Књига, Београд 1979.

[4]. Coelho P. M, Pinho C. Considerations about equations for steady state flow in natural gas pipelines. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering 2007, 3: 262-73

[5]. Manojlović V, Arsenović M, Pajović V. Optimized design of a gas-distribution pipeline network. Applied Energy 1994, 48: 217-24

[6]. Крстић М. Алгоритми за израчунавање стационарне расподеле протока и притисака у дистрибутвним гасоводним мрежама. Нафта 1991; 41: 265-73

[7]. Boulos P.F, Lansey K.E, Karney B.W. Comprehensive water distribution systems analysis handbook for engineers and planners. 2nd ed. Hardback: MWH; 2006

[8]. Corfield G, Hunt BE, Ott RJ, Binder GP, Vandaveer FE. Distribution Design for Increased Demand. In: Segeler CG, editor. Gas Engineers Handbook, New York: Industrial Press; 1973, p. 9/63-9/83

[9]. Бркић Д. Пројектовање посебне класе гасних дистрибутивних мрежа. Истраживања и пројектовања за привреду 2005, 9: 49-56

[10]. Калуђерчић П. Проблем двострано напајаних дионица у гасној дистрибутивној мрежи. Гас 2002, 2-3: 48-51

[11]. Бркић Д, Ђајић Н. Повећање тачности при прорачуну гасне дистрибутивне мреже Харди-Крос методом; XXXII Symopis 2005. Врњачка Бања; 187-90

[12]. Бркић Д. „Природни гас као гориво за грејање”;
Задужбина Андрејевић, Београд 2006.